① Structures Algébriques

Structure	Définition
Groupe	Ensemble muni d'une loi de composition interne, associative, admettant un élément neutre et des inverses pour chaque élément.
Anneau	Ensemble avec deux opérations (addition et multiplication), l'addition formant un groupe abélien, et la multiplication admettant un élément neutre, étant associative et distributive par rapport à l'addition.
Corps	Anneau commutatif où chaque élément non nul possède un inverse multiplicatif.
Morphisme des groupes	Une application entre deux groupes qui respecte la structure de groupe.
Morphisme d'anneaux	Une application entre deux anneaux qui respecte la structure d'anneau.

$Bij(X), GL(V)$

$K[X], \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

② Espaces vectoriels

Définition 5.1.1. Soit K un corps. Un **K-espace vectoriel** est un ensemble non vide V munis de deux lois :

addition

(E1) une loi interne $+ : V \times V \to V$ telle que $(V, +)$ est un groupe abélien ; et

(E2) une loi externe $\cdot : K \times V \to V$ telle que pour tous $u, v \in V$ et pour tous $\lambda, \mu \in K$ on a que

multiplication par un scalaire — vecteurs — scalaires

- $1_K \cdot v = v$,
- $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$,
- $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$, et
- $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.

Screen clipping taken: 26/10/2025 13:58

$(V, +)$ groupe abélien

$+$ est commutative

- $+$ est associative : $(u+v)+w = u+(v+w)$
- $\exists\, 0 \in V$ tq. $0 + v = v = v + 0 \quad \forall v \in V$
- $v \in V \to \exists -v \in V$ t.q. $v + (-v) = 0 = (-v) + v$

Exemples : $V = \{0_V\}$, $V = K^n$, $V = K[x]$,

$V = \mathcal{F}(X, W)$, $V = M_{m \times n}(K)$

ensemble $\neq \emptyset$; K-espace

Définition (Sous-espace)

K corps, $(V, +, \cdot)$ K-espace vectoriel

$W \subset V$ sous-espace $\Longleftrightarrow$ $(W, +, \cdot)$ est un K-espace vectoriel

restriction

Notation : $W \leq V$

Proposition : $\emptyset \neq W \subset V$ est un sous-espace

$\Longleftrightarrow \left(\lambda \in K,\ u, v \in W \Rightarrow \lambda u + v \in W \right)$

Exemples

(A) K corps, V K-espace vectoriel

- $v_1, \dots, v_n \in V$, $W = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_n) =$

  $= \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n ;\ \lambda_i \in K \}$

- $X \subset V$, $W' = \mathrm{Vect}(X) = \bigcap_{U \in S} U$

  $S = \{ U \leq V ;\ X \subset U \}$

Ⓑ K corps, V K-espace vectoriel
$U, W \leq V$. Alors,

- $U \cap W \leq V$
- $U + W \leq V$

Rappel : $R = U \oplus W \iff \begin{cases} R = U + W \\ U \cap W = \{0\} \end{cases}$

Ⓒ K corps, V, W K-espaces vectoriels
$\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$

- $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{v \in V \, ; \, \varphi(v) = 0\} \leq V$
- $\mathrm{Im}(\varphi) = \{w \in W \, ; \, \exists v \in V \text{ t.q. } \varphi(v) = w\}$
  $\leq W$

Rappel : $\varphi \in \mathcal{L}(V, W) \iff \varphi(\lambda u + v) = \lambda \varphi(u) + \varphi(v)$
$\forall \lambda \in K, \forall u, v \in V$

③ Bases & dimension

Définition (Base)

K corps, V K-espace vectoriel
$X \subset V$ est une base $\iff$

- X est une partie génératrice $(V = \mathrm{Vect}(X))$
- X est une partie libre

Screen clipping taken: 26/10/2025 14:27

Dimension

→ V est dit de dimension finie si $\exists\, X \subset V$ finie telle que $V = \mathrm{Vect}(X)$

Si $\dim(V) < \infty$, alors toutes les bases ont le même nombre d'éléments. Pourquoi ?

Théorème 7.1.5. *Si $V \neq \{0\}$ est engendré par une partie finie $\{v_1, \ldots, v_n\}$, c.-à-d., s'il existe un nombre fini (> 0) de vecteurs $v_1, \ldots, v_n \in V$ tels que $V = Vect(v_1, \ldots, v_n)$, alors toute partie $X \subset V$ linéairement indépendante est finie et ne contient pas plus de n éléments. (c.-à-d., $|X| \leq n$).*

Soient $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ et $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_k\}$ deux bases de V.

① $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ et $\underset{X}{\underset{\parallel}{\mathcal{C}}}$ libre $\overset{\text{Thm}}{\underset{7.1.5}{\Longrightarrow}}$ $\boxed{k \leq n}$

② $V = \mathrm{Vect}(\mathcal{C})$ et $\underset{X}{\underset{\parallel}{\mathcal{B}}}$ libre $\overset{\text{Thm}}{\underset{7.1.5}{\Longrightarrow}}$ $\boxed{n \leq k}$

$\Rightarrow k = n$

Si $\dim(V) < \infty$ et $X \subset V$ est libre, alors il existe $v_1, \ldots, v_k \in V$ tels que $\mathcal{B} := X \cup \{v_1, \ldots, v_k\}$ est une base de V.

Screen clipping taken: 26/10/2025 14:34

Théorème 7.1.9 (de la base incomplète). *Supposons que V soit de dimension finie. Soit $L \subset V$ une partie libre (= linéairement indépendante). Alors, L peut être complété en une base de V. En plus, si $|L| = \dim V$, alors L est une base.*

Pourquoi ? Key lemma !

- $X \subset V$ libre, $w \notin \mathrm{Vect}(X)$
  $\Rightarrow X \cup \{w\}$ est libre

idée : $v_1, \dots, v_n \in X$

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \beta w = 0$$

$\Rightarrow \beta = 0$ Why??

$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$

4 Applications Linéaires

Screen clipping taken: 26/10/2025 14:41

Théorème 8.1.3. *Supposons que V soit un espace vectoriel de dimension finie sur le corps K. Soit $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ une base ordonnée de V. Soit W un espace vectoriel sur le même corps K et soient $w_1, \dots, w_n$ des vecteurs quelconques dans W. Alors, il existe exactement une application linéaire $\varphi : V \to W$ telle que $\varphi(v_i) = w_i$ pour tous $1 \leq i \leq n$.*

Théorème 9.1.4 (Théorème du rang). *Supposons que V soit de dimension finie. Alors*

$$\dim(\mathrm{im}(\varphi)) + \dim(\ker(\varphi)) = \dim(V).$$

Ici : $\varphi \in \mathcal{L}(V, W)$
V et W K-espaces

Corollaire 9.1.8. *Si V est de dimension finie avec $\dim(V) = n$, alors V est isomorphe à K^n.*

Screen clipping taken: 26/10/2025 14:44

choix de base !

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base ordonnée de V, alors l'application linéaire

$$V \ni v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in K^n$$

est un isomorphisme.

est un isomorphisme .

L'exemple le plus important : $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_{m\times n}(K)$

$$K^n \simeq \mathbb{M}_{n\times 1}(K) \xrightarrow[\text{par } A \text{ (à gauche)}]{\text{mult.}} \mathbb{M}_{m\times 1}(K) \simeq K^m$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cong (x_1, \ldots, x_n)$$

Pourquoi ?

$$[v]_{\mathcal{B}} \longmapsto [\varphi(v)]_{\mathcal{C}}$$

$$\begin{tikzcd} {[v]_{\mathcal{B}}} \arrow[d, leftrightarrow] & \mathbb{M}_{n\times 1}(K) \arrow[rr, "\text{mult. par}"] & & \mathbb{M}_{m\times 1}(K) \\ v & & A = [\varphi]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} & \\ & V \arrow[uu, "\simeq"'] \arrow[rr, "\varphi"] & & W \arrow[uu, "\simeq"'] \end{tikzcd}$$

V avec $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ base ordonnée

W avec $\mathcal{C} = (w_1, \ldots, w_m)$ base ordonnée

$$A = \left(\varphi(v_1) \;\middle|\; \varphi(v_2) \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; \varphi(v_n) \right)$$

j-ème colonne : $[\varphi(v_j)]_{\mathcal{C}}$

↑

Vecteur de coordonnées
par rapport à la base $\mathcal{C}$

Cas particulier : $V = W$, $\varphi = \mathrm{id}$

$[\mathrm{id}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = P_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$ est la matrice de changement de base entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

What's next ?

- Calcul matriciel (la méthode de Gauss) et applications :
  - Comment trouver une base pour ...
  - Matrices de changement de base
  - Matrices de une application linéaire
  - Comment compléter une base
- Déterminant
  - ⇝ notre discussion sur les formes linéaires sera utile
  - ⇝ on va revisiter le groupe S_n
- Applications Linéaires

- Applications Linéaires
  - Matrices semblables
  - Polynôme caractéristique
  - Valores et vecteurs propres
  - Diagonalisation
- Espaces avec un produit scalaire